

Zanimivosti iz zbirke SATCITANANDA – FIZIKA:

Slavolok

Naloga

S šestdesetimi homogenimi opekami (po trideset na levi in trideset na desni strani) dimenzije 30 x 20 x 10 cm želimo zgraditi slavolok tako, da ne bo treba uporabiti nikakršnega veziva ali lepila med elementi. Kako bomo postavili bloke, kakšna bo širina in višina konstrukcije.

Potrebna znanja iz srednje šole:

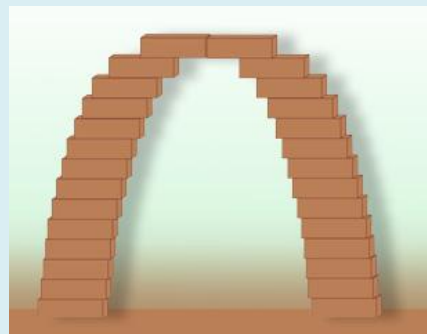
- Poglavlje fizike: sile, navor, težišče.
- Matematika: harmonične številске vrste.

OZADJE

S pomočjo znanja fizike, poglavja navor sile in težišče lahko sestavimo slavolok, kakršen je na desni sliki, ne da bi pri tem uporabili vezivo ali lepilo med gradniki.

Slavolok gradimo seveda od spodaj navzgor, računati pa ga moramo od zgoraj navzdol. Računamo, na katerem mestu mora biti podprt določen gradnik, da ostaja sistem v ravnotežju.

Z nizanjem gradnikov lahko dosežemo poljubno širino objekta.



Rešitev naloge

$$N = 30$$

$$a = 30 \text{ cm}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$c = 10 \text{ cm}$$

$$d, h = ?$$

1. Zgornja opeka je podprta na svojem težišču, to je na $a/2$.

2. Težišče prvih dveh opek je na razdalji $a/4$ levo od desnega roba druge opeke. Tja lahko postavimo desni rob tretje opeke.

3. Težišče prvih treh opek izračunamo: $r_{t3} = \frac{F_g \frac{a}{2}}{3F_g} = \frac{a}{6}$.

Premaknjeno je torej za $a/6$ od desnega roba tretje opeke.

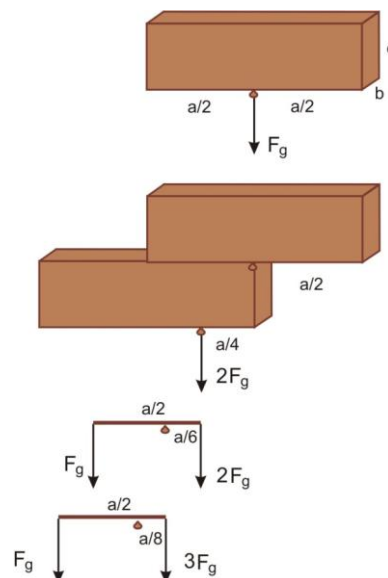
4. Podobno dobimo težišče prvih štirih opek: $r_{t4} =$

$$\frac{F_g \frac{a}{2}}{4F_g} = \frac{a}{8}$$

Premaknjeno je torej za $a/8$ od desnega roba

četrte opeke.

5. Postopek ponavljamo do konca.



Polovico širine slavloloka dobimo, če seštejemo N členov vrste:

$$d = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{6} + \frac{a}{8} + \dots = \frac{a}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) \quad (1)$$

Izraz v oklepaju je harmonična vrsta (vrsta recipročnih vrednosti naravnih števil). Vrsta divergira, kar pomeni, da gre $d \rightarrow \infty$, če gre $N \rightarrow \infty$.

Delno vsoto N členov lahko izračunamo neposredno s pomočjo enačbe 1. V primeru, da je N velik si pomagamo s formulo:

$$d \cong \frac{a}{2} (\ln N + \gamma + \varepsilon_N) \quad (2)$$

kjer je:

$\gamma = 0,577$ Euler – Mascheronijeva konstanta

$$\varepsilon_N \cong \frac{1}{N}$$

Rezultat za $N = 30$

a. Po enačbi (1): $d = 3,99 \cdot 15 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$

b. Po enačbi (2): $d = 15 \text{ cm} \left(\ln 30 + 0,577 + \frac{1}{30} \right) = 60 \text{ cm}$

Širina slavloloka ob vznožju bo torej $2d = 120 \text{ cm}$, višina pa $h = 30 \cdot c = 300 \text{ cm}$.

Pri praktični izvedbi bi bil portal nekoliko ožji, saj smo računali položaj vseh gradnikov tako, da so navori sile teže posameznih gradnikov v labilnem ravnovesju.

