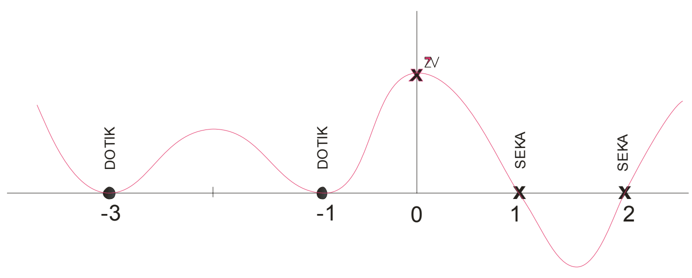
Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA
O. Arnuš, V. Batagelj, A. Blaznik, B. Roblek, M. Strnad
POLINOMI. RACIONALNE FUNKCIJE. KRIVULJE II. REDA

Poglavje II. RACIONALNE FUNKCIJE; ENAČBE IN NEENAČBE, str.31

Naloga10č: Določi ničle, pole, asimptote in načrtaj približen graf funkcije $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x^2-2x+1}$

Rešitev	**Razlaga**
$f(x)=\dfrac{9-x^2}{x^2-2x+1}$ Približen graf $f(x)=\dfrac{-x^2+9}{x^2-2x+1}$	Narisati je treba graf racionalne funkcije. DEF.: Racionalna funkcija je vsak okrajšan kvocient dveh polinomov p(x) in q(x): $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ Standardni koraki za risanje racionalne funkcije so:
N: $9-x^2=0$ $(3-x)(3+x)=0$ $3-x=0$ $x_1=3$ (x) - liha ničla $3+x=0$ $x_2=-3$ (x) - liha ničla	**Ničle(N):** - Poiščem ničle funkcije: $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=0$, torej je $p(x)=0$ - V ničlah lihe stopnje (na grafu jih označujemo kot križec -x) graf seka x os, oz. rečemo, da funkcija spremeni predznak. Ničle prve stopnje se imenujejo tudi enostavne ničle. - V sodih ničlah (na grafu jih označujemo s piko) pa se graf dotakne x os, oz. funkcija ne spremeni predznaka. Primer: $p(x)=(x-1)(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^4$ $x_1=1$ liha ničla (križec) $x_{2,3}=-1$ soda ničla (pika) $x_{4,5,6}=2$ liha ničla (križec) $x_{7,8,9,10}=-3$ soda ničla (pika)  Določim še predznak začetne vrednosti ZV: $p(0)=(-)(+)(-)(+)>0$ Vidim, da je pozitivna in križec na y osi mi že pomaga določiti graf p(x).

P: $x^2-2x+1=0$
(-1)(-1)
Razcep po Viètu!

$(x-1)(x-1)=0$

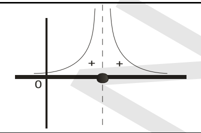
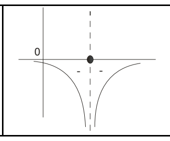
$(x-1)^2=0$

$x-1=0$

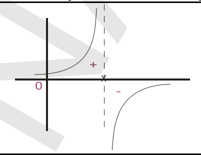
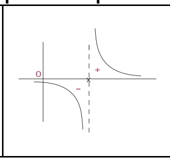
$x_{1,2}=1$

To je sodi pol.

Poli (P):
Poiščem pole racionalne funkcije iz enačbe, ko je imenovalec funkcije enak 0: → q(x)=0
DEF.: Poli so točke na x osi, pri katerih funkcija ni definirana. Graf nikoli ne poteka skozi pol. V polu je VEDNO navpična asimptota.
DEF.: Navpična asimptota je premica v polu (rišem jo črtkano), katere se graf nikoli ne dotakne. Navpična asimptota ima enako enačbo kot pol.
Tudi poli so lahko lihe ali sode stopnje. V sodem polu (označim ga s točko) funkcija ohrani predznak oz. veji grafa »prihajata« iz leve in desne strani ob asimptoti v polu. Tu sta dve možnosti v odvisnosti od pozitivnega ali negativnega predznaka funkcije:

$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$		ali		$f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

V lihem polu funkcija spremeni predznak in veji grafa »prihajata« iz različnih strani ob navpični asimptoti v polu. Spet sta dve možnost:

$f(x)=\frac{1}{x-1}$		ali		$f(x)=-\frac{1}{x-1}$

A: st(p) = 2
<u>st(q) = 2</u>

st(p) = st(q)
2 = 2

Zato ima graf za asimptoto vzporednico z x osjo z enačbo:

$y=\frac{-1}{1}$ to je: $\frac{vod.koef.p(x)}{vod.koef.q(x)}$

<u>y = -1</u>

A: Določimo poševno asimptoto
DEF.: Poševna asimptota je krivulja (premica, parabola,...), kateri se graf poljubno približa, vendar se je ne dotakne razen v posebnih primerih.
Imenujmo **st** stopnjo, ki je enaka največjemu eksponentu spremenljivke x.
Tu so tri možnosti:

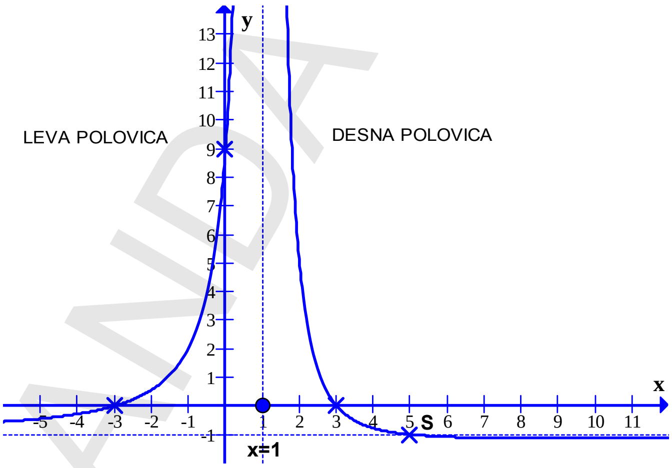
(a) st(p) < st(q) Tedaj je poševna asimptota <u>vedno</u> x os oz. y=0
Glej nalogo 6b!

(b) st(p) = st(q) Poševna asimptota je vedno kvocient <u>vodilnih koeficientov</u> polinoma v števcu in polinoma v imenovalcu. To je vedno vzporednica z x osjo. V splošnem graf ne seka poševne asimptote.
DEF.: <u>Vodilni koeficient</u> polinoma $p(x)=a_nx^n+...+a_0$ je realni koeficient a_n, tj. koeficient zraven x-a z najvišjim eksponentom.

<u>Primer:</u> $f(x)=\frac{2x^2-1}{5x^2+2x-1}$
Vodilni koeficient števca je 2, vodilni koeficient imenovalca je 5. Torej je asimptota $y=\frac{2}{5}$.
Kadar določamo asimptoto na ta način, moramo vedno še računsko ugotoviti, če graf krivulje seka dobljeno asimptoto.

Računsko ugotovim, če graf seka to asimptoto. (iščem skupne točke): $\frac{9-x^2}{x^2-2x+1}=-1$ $9-x^2=-x^2+2x-1$ $-2x=-10$ $\underline{x=5}$ Pri x = 5 graf seka asimptoto y = -1. Tako imamo presečišče grafa in asinptote S(5, -1).	Naredimo to za naš primer. $\frac{2x^2-1}{5x^2+2x-1}=\frac{2}{5}/.5(5x^2+2x-1)$ $5(2x^2-1)=2(5x^2+2x-1)$ $10x^2-5=10x^2+4x-2$ $-4x=3$ $x=-\frac{3}{4}$ Vidimo, da se graf in asimptota sekata pri $x=-\frac{3}{4}$, y pa je $\frac{2}{5}$. Torej se sekata v točki $S(-\frac{3}{4},\frac{2}{5})$ Potem, ko graf seka poševno asimptoto, se obrne k asimptoti. To isto poševno asimptoto bi lahko dobili z deljenjem števca z imenovalcem. **(c)** st(p) > st(q) To možnost obravnavamo v nalogi 11d) istega poglavja.
ZV: $f(0)=\frac{9-0}{0-0+1}=\frac{9}{1}=9$ Torej graf seka y os v $P_y(0,9)$. Na grafu ni treba iskati dodatne točke.	**Začetna vrednost (ZV)** Izračunamo začetno vrednost funkcije (v njej graf seka y os). $f(0)=\frac{p(0)}{q(0)}$ Začetna vrednost nam pomaga pri risanju grafa. Lahko se zgodi, da funkcija nima začetne vrednosti. To sta primera, ko ima funkcija pol ali ničlo ravno v x = 0. V teh dveh primerih si z ZV ne moremo pomagati pri risanju grafa. Tedaj moramo poiskati neko drugo točko T, ki leži na grafu $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, to je $T(x_0,\frac{p(x_0)}{q(x_0)})$.

Narišemo graf racionalne funkcije ob upoštevanju vsega, kar smo dobili po izračunih.

Izračuni	Komentar	GRAF
N: $x_1 = 3$ (x) $x_2 = -3$ (x)	Liha stopnja. V obeh ničlah seka graf x os	
P: $x_{1,2} = 1$ (.)	Soda stopnja V polu je navpična os katere graf nikoli ne seka	
A: y = -1 S(5,-1)	V S graf seka poševno os: y=-1. Ko jo seka , se obrne proti njej in se ji asimptotsko približuje.	
ZV: f(0) = 9 $P_y(0,9)$	V P_y graf seka y os	- Graf lahko začnemo risati na levi ali desni polravnini in potem narišemo graf še na drugi polravnini. Ne smemo pozabiti, da v S graf seka poševno asimptoto (ki je pri nas vzporedna z x osjo). Takoj, ko jo seka se obrne k njej. Saj vem, da simptote privlačijo krivulje.