Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

A. Blaznik, J. Dolenšek, A. Tomec, I. Žerovnik: Realna števila. Linearna funkcija
Poglavje V.: Linearna funkcija. Enačba in neenačba.
Točka 6. Sistem treh ali več linearnih enačb

Str. 64, naloge 142 b), 124 a), 146 a)

Reši sisteme enačb:

142 b)
$$\begin{aligned} 2(x-y)+z&=4\\ 3(x-z)+y&=2\\ 4(y-z)+x&=-3 \end{aligned}$$

144 a)
$$\begin{aligned} x:y:z&=3:5:4\\ 2x-3y+4z&=14 \end{aligned}$$

146 a)
$$\frac{x+4}{y}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{y-2}{z+1}=1$$
$$\frac{z+3}{2x}=-1$$

TEORIJA

Rešiti moram sistem treh linearnih enačb z tremi neznankami (3x3).

Sistem napišem v obliki:

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 \end{aligned} \qquad \left.\begin{matrix} a_i\\ b_i\\ c_i\\ d_i \end{matrix}\right\} \in \Re,\ i=1,\ldots,3$$

Trojica T(x, y, z) so rešitev sistema. T(x,y,z) pa je presečišče treh ravnin.

Postopek reševanja:
(1) Vse enačbe uredim v obliko (*).
(2) Dvakrat združim po dve in dve enačbi in se dvakrat znebim iste neznanke.
(3) Tako dobim dve enačbi z dvema istima neznankama.
(4) Naprej rešujem po navodilih za sistem 2x2.
(5) Ko dobim iz (4) dve rešitvi, ju vstavim v eno izmed enačb v urejeni obliki (1) in
(6) dobim še zadnjo rešitev.

Rešitev

142 b) $2(x-y)+z=4$

$3(x-z)+y=2$ UREDIM (0)

$4(y-z)+x=-3$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-2y+z=4 \quad /.3 \quad /.4 \\ 3x+y+-3z=2 \\ x+4y-4z=-3 \end{array}\right.$$

+ (1) + (2)

Odločim se znebiti z-ja. Prvo enačbo množim s 3 in jo seštejem z drugo enačbo (1). Nato pa jo množim s 4 in jo seštejem s tretjo enačbo (2)

(1) $$\left.\begin{array}{l} 6x-6y+3z=12 \\ 3x+y-3z=2 \end{array}\right\} +$$

(2) $$\begin{array}{l} 8x-8y+4z=16 \\ x+4y-4z=-3 \\ \hline 9x-4y \quad =13 \end{array}$$

Združim rezultat (1) in (2) ter rešim 2x2 sistem (3)

(3)

$$\left.\begin{array}{l} 9x-5y=14 \ / (-1) \\ 9x-4y=13 \end{array}\right\} +$$

(4)

$$\left.\begin{array}{l} -9x+5y=-14 \\ 9x-4y=13 \\ \hline y=-1 \end{array}\right\} +$$

Vstavim v (3) in dobim:

$9x+4=13$

$9x=9$

$\underline{x=1}$

x, y vstavim v (0) in dobim z: $2+2+z=4$ (5)

$\underline{z=0}$

Tako dobim za rezultat rešitev x=1, y=-1 in z=0. Če smatram vsako izmed danih enačb za ravnino, potem je točka T(1, -1, 0) presečišče teh treh ravnin.

144 a) $x:y:z=3:5:4$

$$\underline{2x-3y+4z=14}$$

Razlaga:
Razmerje x:y:z=3:5:4 mi omogoča, da zapišem:

$$x=3t$$
$$y=5t$$
$$z=4t$$

in to vstavim v drugo enačbo, od koder dobim t, ki ga potrebujem za x, y, in z.

$$2.3t-3.5t+4.4t=14$$
$$6t-15t\ +\ 16t=14$$
$$7t=14$$
$$t=2$$

$$x=3.2=6$$
$$y=5.2=10$$
$$\underline{z=4.2=8}$$

146 a) $\dfrac{x+4}{y}=\dfrac{1}{2}$

$$\dfrac{y-2}{z+1}=1$$
$$\underline{\dfrac{z+3}{2x}=-1}$$

Uredim v dveh korakih:

$$2x+8=y$$
$$y-z=z+1$$
$$\underline{z+3=-2x}$$

$$\left.\begin{aligned}2x-y&=-8\\ y-z&=3\end{aligned}\right\}+$$
$$\underline{2x+z=-3}$$

Seštejem prvo in drugo enačbo ter dobljeno združim v tretjo enačbo.

$$2x-y\quad=-8$$
$$\underline{y-z=3}$$
$$\underline{2x\quad-z=-5}$$

$$2x+z=-3$$

$$\left.\begin{aligned}2x-z&=-5\\ 2x+z&=-3\end{aligned}\right\}+$$
$$4x\quad=-8$$
$$\underline{x=-2}$$

Vstavim x v:

$$2x-z=-5$$
$$-4-z=-5$$

$\underline{z=1}$, da dobim z.

Vstavim x in y v eno od treh urejenih enačb:

$$y-z=3$$
$$y-1=3$$
$$\underline{y=4}$$

Rešitev je T(-2, 4, 1)