A. Cokan, I. Štalec: ZAPOREDJE, DIFERENCIALNI IN INTEGRALNI RAČUN
Poglavje I.: ZAPOREDJA, Točka 1: Definicija. Lastnosti zaporedij

Stran 7, naloga 8: Dokaži, da je zapredje $a_n = \frac{n+2}{n}$ strogo padajoče.
Kateri členi ležejo na intervalu [1,2 ; 1,5]

Rešitev:

$a_n = \frac{n+2}{n}$

a) Strogo padajoče

Za začetek napišem nekaj členov zaporedja:

$a_n = \frac{n+2}{n}$

n=1 $a_1 = \frac{1+2}{1} = 3$

n=2 $a_2 = \frac{2+2}{2} = 2$

n=3 $a_3 = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

n=4 $a_4 = \frac{4+2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} =$ 1,5

n=5 $a_5 = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

n=6 $a_6 = \frac{6+2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

n=7 $a_7 = \frac{7+2}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{1}{2}$

n=8 $a_8 = \frac{8+2}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

n=9 $a_9 = \frac{9+2}{9} = \frac{11}{9} = 1\frac{1}{9}$

n=10

Razlaga:
Preden se lotim te naloge moram najprej vedeti vsaj dve definciji: kaj je zaporedje in kdaj je zaporedje strogo naraščajoče.

Def.: Zaporedje je funkcija, ki preslika množico naravnih števil ℕ v množico realnih števil ℝ:

f: ℕ → ℝ ℕ = {1,2,3...}

Zaporedje je naravna funkcija realne spremenljivke

f: $n \mapsto a_n$

ali $a_n = f(n)$

Ker je ℕ ⊂ ℝ je graf zaporedje $a_n = f(n)$ podmnožica grafa realne funkcije realne sprememnljivke $a_n = f(n)$
Graf zaporedjase imenuje DISKRETNA množica točk

Primer

ZAPOREDJE ali NARAVNA FUNKCIJA REALNE SPREMENLJIVKE	REALNA FUNKCIJE REALNE SPRTEMENLJIVKE
f: ℕ → ℝ $a_n = \frac{1}{n}$ *ali* $f(n) = \frac{1}{n}$	f: ℝ → ℝ $y = \frac{1}{x}$ *ali* $f(x) = \frac{1}{x}$

Narišem graf obeh funkcij:

n=1; $a_1 = \frac{1}{1}$ 1. člen zaporeja

n=1;. $a_2 = \frac{1}{2}$ 2. člen zaporeja

n=3; $a_3 = \frac{1}{3}$ 3. člen zaporedja

n=4; $a_4 = \frac{1}{4}$ 4. člen zaporedja

.
.
.

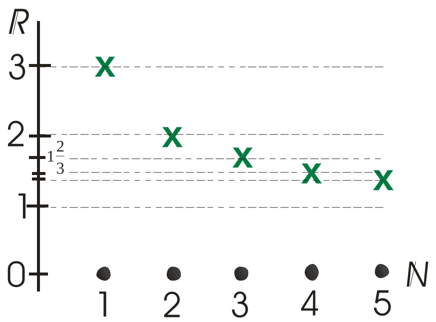
Ta funkcija je racionalna funkcija.

Poiščem
<u>Ničle</u>: jih ni
<u>Pole</u>: x=0
<u>Asimptote</u>: y os
<u>Točko</u>: T(1, 1)

$a_{10} = \frac{10+2}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

n=11 $\quad a_{11} = \frac{11+2}{11} = \frac{13}{11}$

Narišem graf zaporedja in ugotovim, da je zaporedje padajoče.

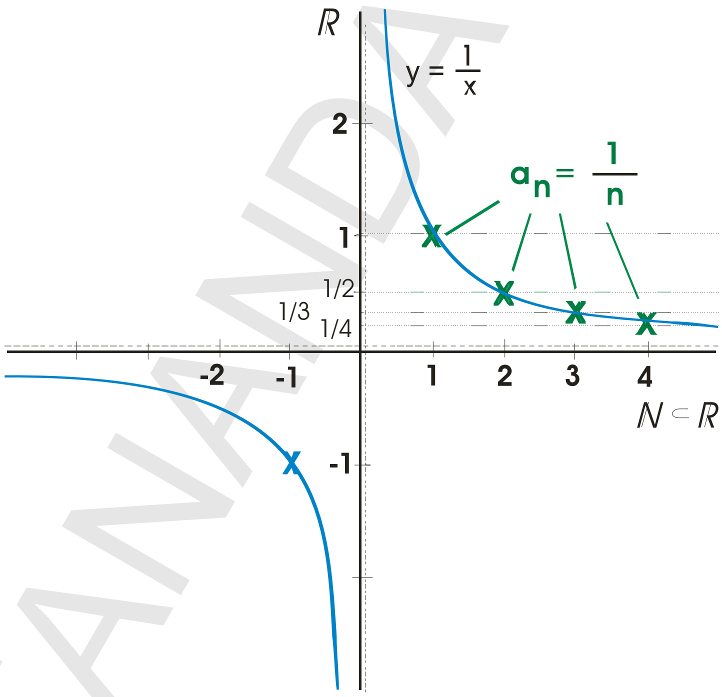


Zaporedje je celo strogo padajoče, ker je vsak naslednji člen manjši od predhodnega.

n=n; $\quad a_n = \frac{1}{n}$ SPLOŠNI ČLEN ZAPOREDJA

(glej nalogo iz racionalnih funkcij)

Oba grafa narišem v isti koordinatni sistem



Vidim, kako malo je zelenih križcev na modrem grafu. Zeleni križci predstavljajo graf zaporedja in vidim, da vse slike ležijo na grafu pripadajoče realne funkcije.

Sedaj pa narišem graf zaporedja še posebej:

$a_1 = 1$

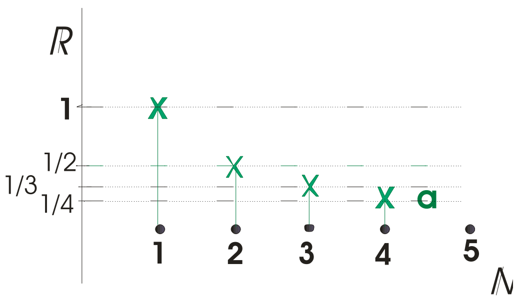
$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$

...

$a_n = \frac{1}{n}$



Tako kot je realna funkcija realne spremenljivke lahko padajoča ali naraščajoča, tako je tudi zaporedje lahko naraščajoče ali padajoče;

Sedaj pa to dokažim še računsko.
Dakazati moram, da velja neenačba

$a_{n+1} < a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

V ta namen poiščem še $a_{n+1} - (n+1)$ člen

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}$$

In vstavim v neenačbo

$$\frac{n+3}{n+1} < \frac{n+2}{n}$$

Ter jo rešim

$$\frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} < 0$$

$$\frac{(n+3)n-(n+1)(n+2)}{n(n+1)} < 0$$

$$\frac{n^2+3n-(n^2+3n+2)}{n(n+1)} < 0$$

$$\frac{n^2+3n-n^2-3n-2}{n(n+1)} < 0$$

$$\frac{-2}{n(n+1)} < 0$$

Zaključek dokaza je:

- Imenovalec je za vsak $n \in \mathbb{N}$ pozitiven
- števec je vedno negativen
- torej je kvocient vedno negativen in neenačba $a_{n+1} \le a_n$ ja za naše zaporedje $a_n = \frac{n+2}{n}$ veljavna za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Torej je zaporedje strogo naraščajoče – Q.E.D.

Def.: Zaporedje a_n je padajoče $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} \le a_n$ tj. vsak naslednji člen ima manjšo ali enako vrednost kot predhodni člen.
Pri strogo padajočem zaporedju pa naslednji člen ne sme biti enak predhodnemu členu.

Def.: Zaporedje a_n je strogo padajoče $\Leftrightarrow$

$a_{n+1} < a_n$

<u>Dokažem,</u> da je zaporedje iz primera strogo padajoče.

$a_n = \frac{1}{n}$ SPLOŠNI ČLEN

$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ NASLEDNJI ČLEN (za n vstavim n+1)

In vstavim v neenačbo

$a_{n+1} < a_n$ (To je prepostavka, da je zaporedje strogo padajoče)

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Dokazati moram, da neenačba velja za vsak $n \in \mathbb{N}$, seveda če hočem dokazati, da je zaporedje strogo padajoče.

Rešim neenačbo:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$$

$$\frac{n-(n+1)}{n(n+1)} < 0$$

$$\frac{n-n-1}{n(n+1)} < 0$$

$$\frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Ugotovim, da je leva stran za vsak $n \in \mathbb{N}$ vedno negativna, ker je imenovalec vedno poziven , števec pa negativen. Torej je neenačba veljavna za vsak $n \in \mathbb{N}$. S tem je tudi dokazana predpostavka, da je zaporedje strogo padajoče.

Sedaj se lotim naloge na levi strani.

b) Kateri členi ležejo na intervalu [1,2 ; 1,5]?

Ker je zapisanih dovolj členov, lahko že iz tega odčitamo, da je $a_4 = 1{,}5$ na intervalu [1,2 ; 1,5]. Ker je zaporedje strogo padajoče so vsi naslednji členi manjši od 1,5. Iščemo samo še člene, ki so večji ali enaki 1,2. Vidimo, da je a_{10} natanko enak 1,2. Torej so na intevalu vsi členi od vklučno a_4 do vključno a_{10}.

Do iste ugotovitve lahko pridemo tudi takole:
a_n mora biti med 1,2 in 1,5 vključujoč meje. Zapišem neenačbo:

$$1{,}2 \le a_n \le 1{,}5$$

In jo rešim. Zapišem v dveh delih kot sistem neenačb:

$(1{,}2 \le a_n)$ in $(a_n \le 1{,}5)$

$(1{,}2 \le \dfrac{n+2}{n})$ in $(\dfrac{n+2}{n} \le 1{,}5)$ in rešim

$\dfrac{n+2}{n} \ge \dfrac{12}{10}$

$(\dfrac{n+2}{n} - \dfrac{6}{5} \ge 0)$ in $(\dfrac{n+2}{n} - \dfrac{3}{2} \le 0)$

$(\dfrac{5(n+2)-6n}{5n} \ge 0$ in $(\dfrac{2(n+2)-3n}{2n} \le 0)$

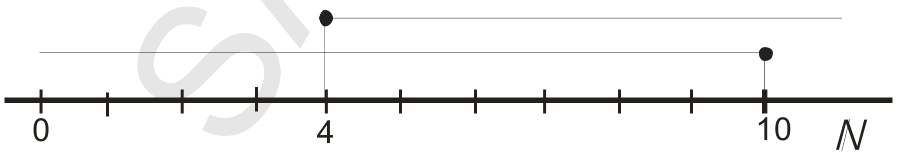
$(\dfrac{5n+10n-6n}{5n} \ge 0$ in $(\dfrac{2n+4-3n}{2n} \le 0)$

$(\dfrac{10-n}{5n} \ge 0$ in $(\dfrac{4-n}{2n} \le 0)$

Tu je imenovelec vedno (v levi in desni neenačbi) pozitiven, ker je $n \in \mathbb{N}$, zato mora biti števec negativen ali 0.

$$10 - n > 0$$
$$-n > -10 \,/(-1)$$
$$n \le 10$$

$$4 - n \le 0$$
$$-n \le -4$$
$$n \ge 4$$



Vidim, da je rešitev n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Torej so a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 in a_{10} na danem intervalu.