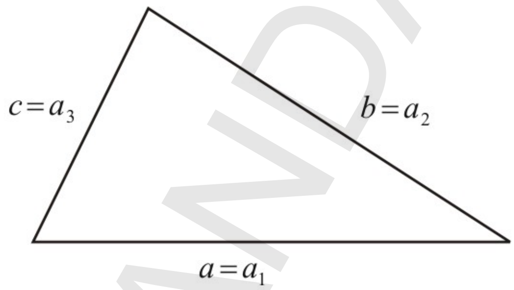
Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

A. Cokan, I. Štalec: ZAPOREDJA, DIFERENCIALNI IN INTEGRALNI RAČUN
Poglavje I.: ZAPOREDJA
Točka 2: Aritmetično in geometrijsko zaporedje.
A Aritmetično zaporedje

Stran 9, naloga10. Stranice trikotnika oblikujejo aritmetično zaporedje z razliko $2cm$. Ploščina trikotnika je $6cm^2$. Kolikšne so stranice?

a_1, a_2, a_3
$d = 2cm$
$p = 6cm^2$
$\overline{}$
$a, b, c =$



Označim stranice a_1, a_2, a_3.

RAZLAGA:
Preden se lotim te naloge moram najprej vedeti vsaj dve definciji: kaj je zaporedje in kdaj je zaporedje aritmetično.

Def.: Zaporedje je funkcija, ki preslika množico naravnih števil ℕ v množico realnih števil ℝ:
f: ℕ → ℝ $\mathbb{N} = \{1,2,3...\}$
Zaporedje je naravna funkcija realne spremenljivke
f: $n \mapsto a_n$
ali $a_n = f(n)$
Ker je $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ je graf zaporedje $a_n = f(n)$ podmnožica grafa realne funkcije realne sprememnljivke $a_n = f(n)$ Graf zaporedja se imenuje DISKRETNA množica točk.

Primer:

ZAPOREDJE ali
NARAVNA FUNKCIJA
REALNE SPREMENLJIVKE

f: ℕ → ℝ

$$a_n = \frac{1}{n}$$
$$ali$$
$$f(n) = \frac{1}{n}$$

REALNE FUNKCIJE
REALNE SPREMENLJIVKE

f: ℝ → ℝ

$$y = \frac{1}{x}$$
$$ali$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Narišem graf obeh funkcij:

n=1; $a_1 = \frac{1}{1}$ 1. člen zaporeja

Ta funkcija je racionalna funkcija.

Poiščem

n=1;. $a_2 = \frac{1}{2}$ 2. člen zaporeja

n=3; $a_3 = \frac{1}{3}$ 3. člen zaporedja

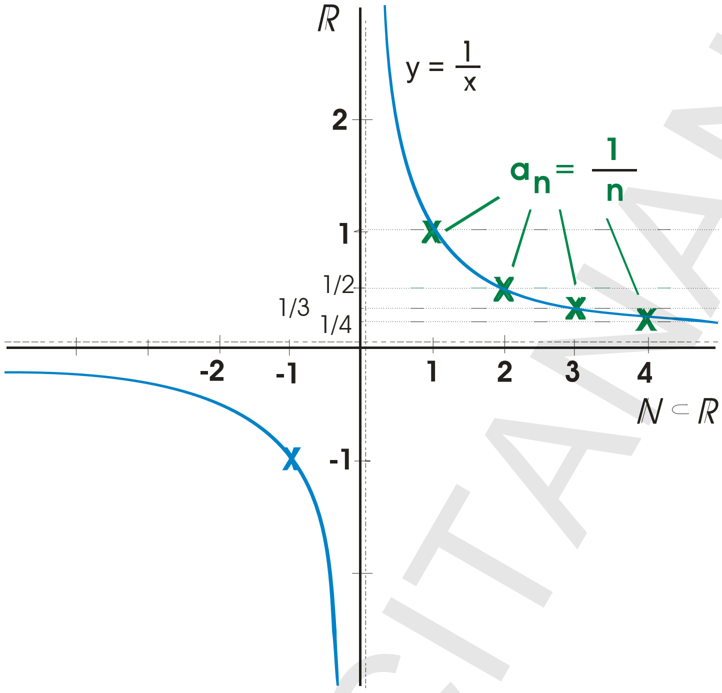
n=4; $a_4 = \frac{1}{4}$ 4. člen zaporedja

n=n; $a_n = \frac{1}{n}$ splošni člen zaporedja

<u>Ničle</u>: jih ni
<u>Pole</u>: x=0
<u>Asimptote</u>: y os
<u>Točko</u>: T(1, 1)

(glej nalogo iz racionalnih funkcij)

Oba grafa narišem v isti koordinatni sistem.



Vidim, kako malo je zelenih križcev na modrem grafu. Zeleni križci predstavljajo graf zaporedja in vidim, da vse slike ležijo na grafu pripadajoče realne funkcije.

Sedaj pa narišem graf zaporedja še posebej:

$a_1 = 1$

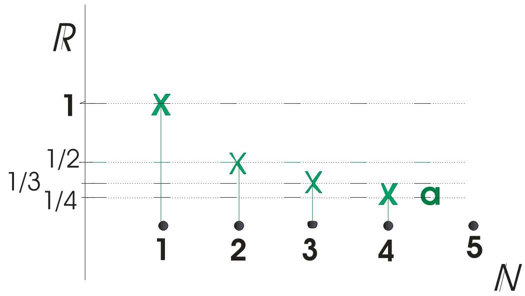
$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$

...

$a_n = \frac{1}{n}$



Def.: Zaporedje a_n je aritmetično, kadar je razlika sosednjih zaporednih členov konstantna.
Naj bodo $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ a_{n+1}$ členi zaporedja.
Da bo to zaporedje aritmetično, mora veljati

$a_{n+1} - a_n =$ konstanta

in jo označim z d (kot diferenca). Torej:
$a_{n+1} - a_n = d$

Velja tudi, da je $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ $(= d)$, kar uporabim pri nalogi, kjer so podani trije členi in je potrebno izračunati neznanko. To je tudi naša naloga.

REŠITEV:

Stranice označim:
$a_1 = a - 2$
$a_2 = a$
$a_3 = a + 2$

Če naj bodo a_1, a_2, a_3 členi aritmetičnega zaporedja, mora veljati:
$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = d$

V našem primeru to velja, saj je:
$a_2 - a_1 = a - (a - 2) = 2 = d$
$a_3 - a_2 = a + 2 - a = 2 = d$
Torej so stranice členi aritmetičnega zaporedja.

Ker je podana še ploščina trikotnika, uporabim še Heronov obrazec za računanje ploščine trikotnika, če so podane vse tri stranice. Glasi se:

$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
kjer je s srednjica trikotnika
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{ob}{2}$$
$$s = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} = \frac{a - 2 + a + a + 2}{2}$$
$$s = \frac{3a}{2}$$
a, b, c pa so stranice trikotnika

Uporabim Heronov obrazec:
$$p = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2} - a\right)\left(\frac{3a}{2} - (a-2)\right)\left(\frac{3a}{2} - (a+2)\right)}$$

$$p=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a-2a}{2}\right)\left(\frac{3a-2a+4}{2}\right)\left(\frac{3a-2a-4}{2}\right)}$$

$$6=\sqrt{\frac{3a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a+4}{2}.\frac{a-4}{2}}\ /\ ^2$$

$$36=\frac{3a^2\left(a^2-16\right)}{2^4}$$

$$16\ .\ 36=3a^2\left(a^2-16\right)/:3$$

$$16\ .\ 12=a^2\left(a^2-16\right)$$

$$192=a^4-16a^2$$

$$a^4-16a^2-192=0$$

Rešim z vpeljavo nove neznanke

$$a^2=t$$

$$t^2-16t-192=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{+16\pm 32}{2}$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=16^2+4.192$$

$$D=1024$$

$$\sqrt{D}=32$$

$$t_1=-8$$

$$t_2=\frac{48}{2}=24$$

$$a^2=t$$

$$a^2=-8$$

Ni realne rešitve

$$a^2=24$$

$$a=\sqrt{6\ .\ 4}$$

$$a=2\sqrt{6}$$

Zapišem še stranice:

$$\underline{a_1=a-2=2\sqrt{6}-2=2\left(\sqrt{6}-1\right)}$$

$$\underline{a_2=a=2\sqrt{6}}$$

$$\underline{a_3=a+2=s\sqrt{6}+2=2\left(\sqrt{6}+1\right)}$$

in naloga je rešena.